Filtre antirepliement

1. Introduction

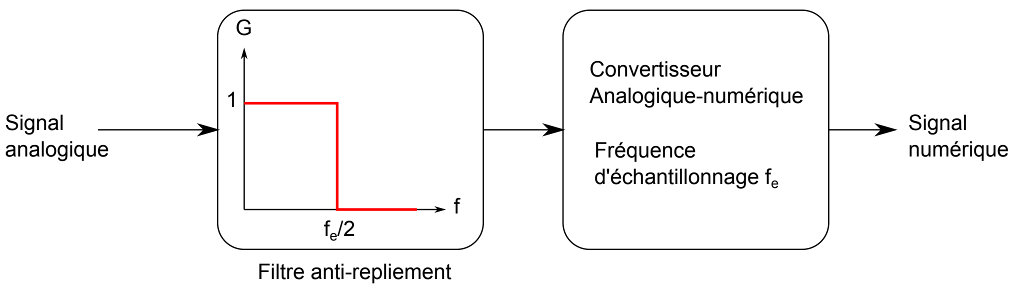
Comme nous l'avons vu dans les TP Analyse spectrale des signaux périodiques, le repliement de spectre se produit lorsque le signal périodique contient des composantes spectrales (des harmoniques) dont la fréquence excède la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Dans les TP Réponse fréquentielle d'un filtre analogique, nous avons fait l'étude expérimentale d'un filtre passe-bas du second ordre en régime sinusoïdal. Nous allons voir comment ce filtre peut constituer un *filtre anti-repliement*, dont la fonction et de réduire l'effet du repliement de spectre.

2. Principe

On suppose que l'on doit mettre en place un système de numérisation opérant à la fréquence d'échantillonnage f_e. La plupart des signaux périodiques numérisés auront l'essentiel de leur spectre entièrement dans la bande $[0, f_e/2]$ mais il peut arriver que certaines harmoniques de rang élevé aient une fréquence au delà de $f_e/2$. Le repliement de ces harmoniques dans la bande de fréquence utile peut nuire à la qualité de la numérisation. Il faut donc réduire ces harmoniques par un filtrage passe-bas : c'est la fonction du filtre anti-repliement. La fréquence de coupure du filtre est choisie à $f_e/2$.

Le schéma suivant montre un filtre anti-repliement idéal placé avant le convertisseur analogique-numérique :



Le gain de ce filtre idéal est nul au dessus de la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Dans la bande passante, le gain est égal à 1. Le filtre doit restituer fidèlement les signaux périodiques dont toutes les harmoniques sont dans sa bande passante. Pour cela, il doit non seulement avoir un gain constant dans la bande passante, mais il faut aussi que son déphasage soit linéaire par rapport à la fréquence, c'est-à-dire de la forme :

$$\psi(f) = -2\pi\tau f \tag{1}$$

Considérons en effet un signal périodique avec un fondamental et une harmonique de rang 2 :

$$e(t) = A_1 \cos(2\pi f t + \phi_1) + A_2 \cos(4\pi f t + \phi_2) \tag{2}$$

Si les deux fréquences f et $2f$ sont dans la bande passante, la sortie du filtre s'écrit :

$$s(t) = A_1 \cos(2\pi f(t-\tau) + \phi_1) + A_2 \cos(4\pi f(t-\tau) + \phi_2) = e(t-\tau) \tag{3}$$

La sortie est ainsi identique à l'entrée, mais retardée de la durée τ. Ce résultat se généralise à un signal périodique dont toutes les harmoniques sont dans la bande passante. La durée τ est le retard du filtre.

En pratique, un filtre anti-repliement n'est pas parfait. Son gain dans la bande passante n'est pas tout à fait constant, son déphasage n'est pas tout à fait linéaire par rapport à la fréquence, et son gain décroît continûment dans la bande atténuante. Un filtre d'ordre 2 a une pente de -40 décibels par décade dans la bande atténuante (le filtre idéal a une pente infinie).

3. Étude du filtre anti-repliement

3.a. Matériel et logiciels utilisés

Le filtre anti-repliement est un filtre passe-bas du second ordre de fréquence de coupure $f_c = 1000\,\text{Hz}$. Ce filtre a été étudié dans les TP Réponse fréquentielle d'un filtre analogique. Il faudra bien sûr se référer aux courbes expérimentales de réponse fréquentielle de ce filtre.

On se propose d'étudier le fonctionnement de ce filtre avec un signal périodique, dans deux cas :

- ▷ Toutes les harmoniques du signal sont dans la bande passante. On cherche alors à obtenir un signal de sortie pratiquement identique à celui de l'entrée (mais décalé dans le temps).
- ▷ Certaines harmoniques sont dans la bande atténuante. On cherche alors à voir comment le filtre réduit les effets du repliement de bande.

Pour cette étude, on utilise le programme PureData syntheseHarmonique-2.pd, qui permet de faire la synthèse d'un signal périodique avec des harmoniques de rang 1,2,3 et 10. Du bruit peut aussi être ajouté.

Afin d'étudier l'effet du filtre sur le signal et sur son spectre, on utilise la carte d'acquisition SysamSP5. Le script python acquisitionTFD-2voies.py permet de faire l'acquisition sur la voie EA0 (entrée du filtre) et sur la voie EA1 (sortie du filtre). Le programme trace la représentation temporelle des deux voies sur la même figure, et la représentation fréquentielle des deux voies. Cela permettra de comparer l'entrée et la sortie du filtre. Les figures sont enregistrées dans des fichiers PDF. Pour chaque utilisation, il faudra modifier la fréquence d'échantillonnage, la durée de l'acquisition, et le nom des fichiers PDF au début du script.

3.b. Réponse du filtre dans la bande passante

Dans cette partie, le signal généré comporte un fondamental et deux harmoniques de rang 2 et 3. Sa fréquence fondamentale est de l'ordre de la centaine de Hertz. On procède en sur-échantillonnage, par exemple avec $f_e = 20\,\mathrm{kHz}$.

> Choisir la fréquence du signal pour que toutes les harmoniques soient dans la bande passante. Étudier le signal de sortie et le comparer au signal d'entrée, en utilisant à la fois la représentation temporelle et la représentation fréquentielle. Vérifier que le retard de la sortie par rapport à l'entrée ne dépend pas de la fréquence du fondamental. Expliquer cette propriété à l'aide de la courbe donnant le déphasage en fonction de la fréquence.
> Pour quelle plage de fréquence peut-on considérer que le signal de sortie est identique au signal d'entrée ? Expliquer avec la courbe de gain en fonction de la fréquence.

3.c. Filtre anti-repliement

Dans cette partie, on fixe la fréquence d'échantillonnage à $f_e = 2\,\mathrm{kHz}$. On ajoute une petite harmonique de rang 10 au signal. La condition de Nyquist-Shannon n'est pas vérifiée pour cette harmonique. Le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3 sont toujours dans la bande passante, et vérifient donc la condition de Nyquist-Shannon.

> Observer le repliement de spectre en numérisant directement le signal (sans filtre). Observer le repliement de l'harmonique de rang 10. En quoi ce repliement est-il gênant ?
> Utiliser le filtre anti-repliement et expliquer son fonctionnement. Est-il efficace ?

3.d. Numérisation d'un signal créneau

La numérisation d'un signal créneau (délivré par le GBF) est difficile car son spectre comporte un grand nombre d'harmoniques. En théorie, un signal créneau parfait comporte une infinité d'harmoniques. Seules les harmoniques de rang impair (1, 3, 5, etc.) sont présentes et leur amplitude décroît en $1/n$. En pratique, il existe bien sûr une fréquence maximale dans le spectre, mais celle-ci est beaucoup plus grande que la fréquence fondamentale (au moins 1000 fois).

On se propose de numériser un signal en créneau de fréquence environ 53 Hz, à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 2\,\mathrm{kHz}$.

> Faire la numérisation directe du signal et constater le repliement de spectre.
> Utiliser le filtre anti-repliement et commenter son efficacité.