TP 2 - Analyse spectrale des signaux périodiques - Partie I

1. Introduction

L'objectif de ces TP est d'apprendre à obtenir le spectre d'un signal échantillonné au moyen de la *transformée de Fourier discrète*. L'analyse spectrale nous permettra de comprendre plus en détail la condition de Nyquist-Shannon. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, on observe en effet un phénomène de repliement de spectre, bien visible sur la représentation fréquentielle du signal.

Dans cette première partie, on verra comment faire l'analyse spectrale d'un signal dont la période est parfaitement connue.

Avertissement : les connaissances à acquérir sur la condition de *Nyquist-Shannon* et sur la *transformée de Fourier discrète* sont seulement empiriques : des éléments théoriques sont donnés en annexe pour information mais ne sont pas à connaître.

2. Série de Fourier et spectre

On considère un signal périodique, représenté par une fonction u d'une variable t réelle, à valeurs réelles, de plus petite période T et de classe C^∞ par morceaux.

La fréquence fondamentale du signal est :

$$f_1 = \frac{1}{T} \tag{1}$$

D'après le théorème de Fourier, cette fonction peut s'écrire comme une somme de sinusoïdes dont les fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale. La somme obtenue est la série de Fourier :

$$u(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{P} C_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right) \tag{2}$$

Dans certains cas, la somme peut être stoppée à un rang P fini. Dans d'autres cas, il faut en principe considérer la limite $P \to \infty$.

Le terme de rang n est nommé l'harmonique de rang n du signal : c'est une sinusoïde de fréquence

$$f_n = nf_1 = \frac{n}{T} \tag{3}$$

L'harmonique de rang n est défini par son amplitude C_n (positive) et sa phase à l'origine φ_n.

Le terme constant $C_0/2$, qui peut être vu comme le terme de fréquence nulle, est la valeur moyenne du signal :

$$\frac{C_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \tag{4}$$

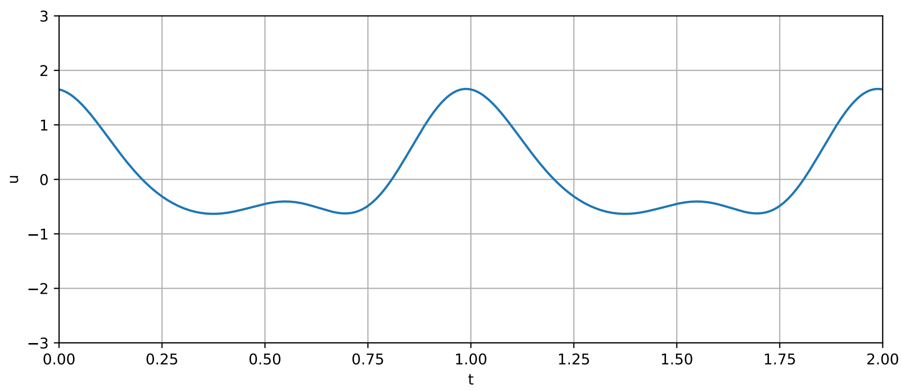
La valeur moyenne est notée $C_0/2$ car, comme nous le verrons, l'analyse spectrale fournit le double de la valeur moyenne, soit C_0.

Considérons comme exemple une fonction dont la série de Fourier s'arrête au rang $P = 3$ (signal comportant trois harmoniques). Par convention, la période est égale à 1. On place les amplitudes et les phases des harmoniques dans deux listes.

```
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import *
C = [0.2,1.0,0.5,0.1]
phi = [0,0,np.pi/3,np.pi/4]
f1 = 1.0
omega = 2*np.pi*f1
def u(t):
    return C[0]/2+C[1]*np.cos(omega*t)\
            + C[2]*np.cos(2*omega*t+phi[1])\
            + C[3]*np.cos(3*omega*t+phi[2])
```

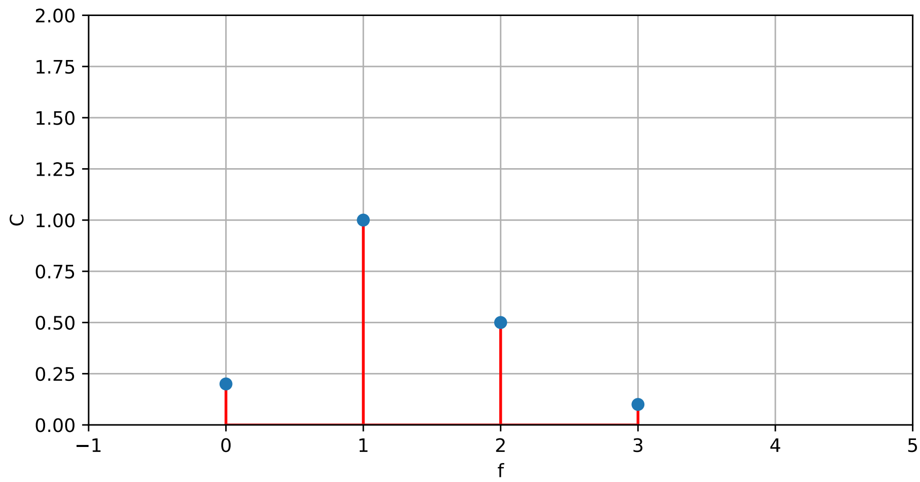
Pour tracer ce signal, il faut l'échantillonner à une fréquence grande devant la fréquence de l'harmonique de rang 3. On peut par exemple calculer 600 points pour deux périodes, ce qui fait 100 points par période pour cet harmonique.

```
N = 600
Tmax = 2.0
Te = Tmax/N
t = np.arange(0,N)*Te
x = u(t)
figure(figsize=(10,4))
plot(t,x)
xlabel('t')
ylabel('u')
axis([0,2,-3,3])
grid()
```



Le spectre du signal est la représentation graphique de l'amplitude C_n en fonction de la fréquence. Un signal périodique a en théorie un spectre discret formé de raies, chacune correspondant à un harmonique. Pour cet exemple, il y a 4 raies : une pour la valeur moyenne (fréquence nulle) et 3 raies pour les harmoniques de rang 1, 2 et 3 :

```
figure(figsize=(8,4))
stem([0,1,2,3],C,'r')
xlabel('f')
ylabel('C')
axis([-1,5,0,2])
grid()
```



Ce spectre constitue une *représentation fréquentielle* du signal, alors que la courbe tracée plus haut (u en fonction du temps) est sa *représentation temporelle*.

3. Condition de Nyquist-Shannon

Dans l'exemple précédent, le spectre comporte une fréquence maximale f_{max}, la fréquence de l'harmonique de rang 3. Une fonction de classe C^∞ admet une fréquence maximale car ses coefficients de Fourier sont nuls à partir d'un certain rang.

On dit que le spectre est à *bande de fréquences limitée* s'il existe une fréquence maximale, c'est-à-dire dire si la série de Fourier peut être stoppée à un rang P. On a bien sûr $f_{max} = Pf_1$.

> Condition de Nyquist-Shannon : l'échantillonnage d'un signal périodique dont le spectre est à bande de fréquences limitée, c.a.d. qu'il admet une fréquence maximale f_{max}, doit se faire à une fréquence d'échantillonnage strictement supérieure au double de la fréquence maximale :
>
> $$f_e > 2f_{max} \tag{5}$$

Si cette condition est vérifiée, il est théoriquement possible de reconstruire entièrement le signal à partir des échantillons. Ce résultat constitue le théorème de Shannon, dont l'énoncé complet (qui n'est pas à connaître) est donné en annexe avec la formule théorique permettant de reconstruire le signal.

Cette condition est très importante en pratique, car elle indique la fréquence d'échantillonnage minimale qu'il faut adopter pour ne pas perdre l'information contenue dans le signal analogique d'origine.

Un exemple de signal dont le spectre n'est pas à bande limitée est le signal créneau idéal. Il est théoriquement impossible d'échantillonner un signal créneau idéal sans perdre d'information sur ce signal. On comprend en effet que les discontinuités du signal ne peuvent être restituées à partir du signal échantillonné, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage. Il en va de même pour un signal continu dont la dérivée n'est pas continue (par ex. le signal triangle).

Certains signaux réels sont à bande de fréquences limitée mais la fréquence maximale est si grande qu'il est impossible de satisfaire la condition de Nyquist-Shannon avec le matériel dont

on dispose. Dans ce cas, il faut trouver une fréquence d'échantillonnage assez grande pour que les harmoniques dont la fréquence est supérieure à la moitié de f_e aient un effet négligeable sur la forme du signal.
Nous allons voir comment la représentation fréquentielle d'un signal permet de comprendre la condition de Nyquist-Shannon.

4. Spectre d'un signal échantillonné

4.a. Transformée de Fourier discrète

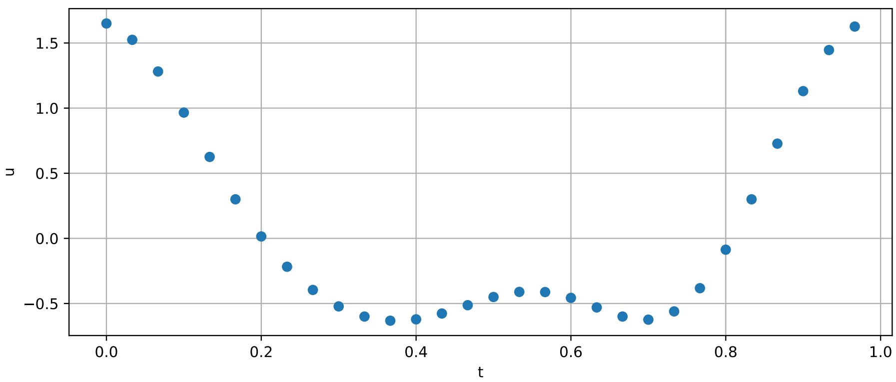
La transformée de Fourier discrète (TFD) est la transformation mathématique qui permet d'obtenir le spectre d'un signal numérique (c.a.d. d'un signal échantillonné). La TFD est définie en annexe pour information. La définition précise de la TFD n'est pas à connaître et la lecture de cette annexe n'est pas nécessaire en première approche, mais elle permet de comprendre les propriétés de la TFD que nous allons observer et qu'il faut connaître.
La TFD est une application qui, à partir de N échantillons consécutifs d'un signal numérique, fournit N nombres complexes :

$$\text{TFD} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^N \tag{6}$$

$$(u_0, u_1, \dots u_{N-1}) \rightarrow (\underline{F}_0, \underline{F}_1, \dots \underline{F}_{N-1}) \tag{7}$$

Lorsqu'on connaît la période du signal (c'est rarement le cas en pratique), on choisit ces N échantillons répartis sur exactement une période. On peut le faire avec l'exemple précédent, en respectant la condition de Nyquist-Shannon. Voici un échantillonnage comportant 30 échantillons répartis sur une période :

```
N = 30
T = 1.0
Te = T/N
t = np.arange(0,N)*Te
x = u(t)
figure(figsize=(10,4))
plot(t,x,"o")
xlabel('t')
ylabel('u')
grid()
```



Remarque : l'échantillon de l'instant $t = T$ ne doit pas figurer dans le tableau, car il figure déjà à l'instant $t = 0$. Il ne faut donc pas utiliser la fonction `numpy.linspace` pour générer le tableau des instants.
Pour calculer la transformée de Fourier discrète, on utilise l'algorithme de transformée de Fourier rapide. C'est pourquoi la fonction qui le fait dans python est `numpy.fft.fft` (FFT : Fast Fourier Transform). Voici comment on l'utilise :

```
from numpy.fft import fft
tfd = fft(x)
```

On obtient ainsi le tableau des N nombres complexes $\underline{F}_n$.
On suppose que l'échantillonnage a été fait en respectant la condition de Nyquist-Shannon. Comme expliqué en annexe, les $N/2$ premiers éléments de la TFD sont les coefficients de Fourier complexes du signal (à condition que T soit exactement sa période) :

$$\underline{F}_n = \underline{C}_n \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots E[N/2] \tag{8}$$

Par ailleurs, $\underline{F}_{N-n}$ est le complexe conjugué de $\underline{F}_n$ (pour $n \geq 1$).
Si N est pair, la TFD est donc constituée des coefficients de Fourier et de leurs conjugués dans l'ordre suivant :

$$(\underline{F}_0, \underline{F}_1, \ldots \underline{F}_{N-1}) = (\underline{C}_0, \underline{C}_1, \ldots, \underline{C}_{\frac{N}{2}}, \underline{C}^*_{\frac{N}{2}-1}, \ldots, \underline{C}^*_1) \tag{9}$$

Si N est impair, la TFD est constituée des coefficients de Fourier et de leurs conjugués dans l'ordre suivant :

$$(\underline{F}_0, \underline{F}_1, \ldots \underline{F}_{N-1}) = (\underline{C}_0, \underline{C}_1, \ldots, \underline{C}_{\frac{N-1}{2}}, \underline{C}^*_{\frac{N-1}{2}}, \ldots, \underline{C}^*_1) \tag{10}$$

La fréquence associée à l'élément d'indice n est égale à n fois la fréquence fondamentale :

$$f_n = \frac{n}{T} \tag{11}$$

Plus généralement, nous verrons que T n'est pas nécessairement la période du signal mais désigne la durée du signal échantillonné (nombre d'échantillons multiplié par la période d'échantillonnage). L'échelle de fréquence associée à la TFD se construit en utilisant la règle suivante : la résolution fréquentielle de la TFD est l'inverse de la durée du signal échantillonné. Les fréquences sont 0, $1/T$, $2/T$, etc. Voici donc comment on construit la liste des N fréquences :

```
freq = np.arange(N)*1.0/T
```

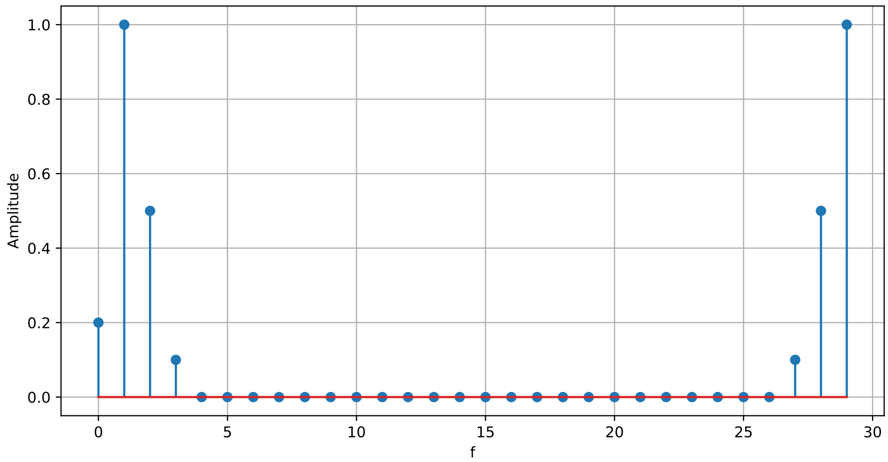
La transformée de Fourier discrète d'un signal échantillonné, de durée T et comportant N échantillons, conduit à un spectre constitué de N raies dont les fréquences sont espacées de

$$\Delta f = \frac{1}{T} \tag{12}$$

La première fréquence du spectre est nulle, la dernière est $\frac{N-1}{T} = f_e - \frac{1}{T}$.

Pour obtenir le spectre, on doit calculer le module de la TFD et multiplier par $2/N$ (voir annexe pour la justification de ce coefficient) :

```
figure(figsize=(10,5))
spectre = np.absolute(tfd)*2.0/N
stem(freq,spectre)
xlabel("f")
ylabel("Amplitude")
grid()
```



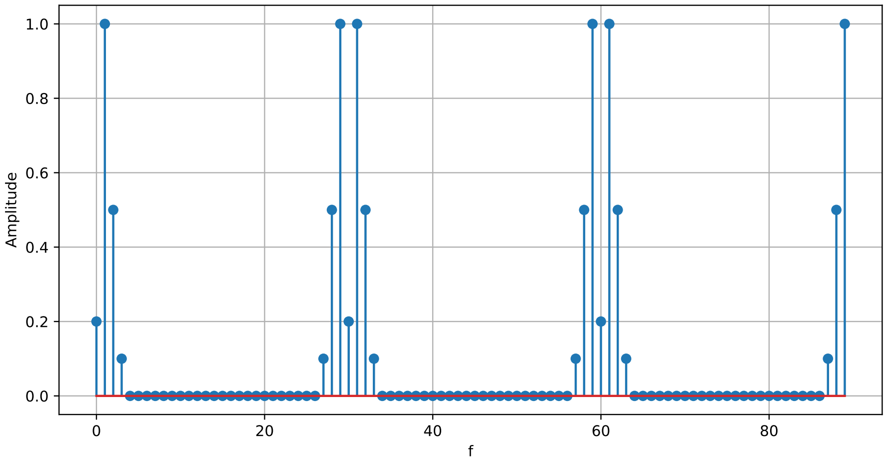
Dans la partie à gauche, on reconnaît le spectre du signal analogique, avec le terme constant, le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3. On remarque que le terme de fréquence nulle est bien C_0, c'est-à-dire le double de la valeur moyenne.
On voit dans la partie à droite des raies de même hauteur mais disposées symétriquement par rapport à la fréquence médiane (ici 15). Une réplique de la raie de fréquence f_1 se trouve à la fréquence $f_e - f_1$, une réplique de la raie de fréquence $2f_1$ se trouve à la fréquence $f_e - 2f_1$, et une réplique de la raie de fréquence $3f_1$ se trouve à la fréquence $f_e - 3f_1$.

Pour un signal échantillonné, à chaque raie du spectre de fréquence f (strictement positive) est associée une *raie image* de même amplitude située à la fréquence $f_e - f$. Les valeurs complexes d'une raie et de sa raie image sont conjuguées.

Si l'on s'intéresse au spectre du signal analogique, on ne retient que la première moitié, pour les fréquences allant de 0 à 15. Il faut noter que la fréquence médiane, appelée aussi fréquence de Nyquist, est la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Le dernier point du spectre correspond à la fréquence $f_e - 1/T$.
Comme il est démontré en annexe, le spectre complet d'un signal échantillonné à la fréquence f_e est en fait périodique, de période f_e. Il faut donc imaginer une répétition périodique du spectre précédent, aussi bien à gauche qu'à droite. Voici une représentation du spectre sur 3 périodes :

```
spectre_etendu = np.concatenate((spectre,spectre,spectre))
```

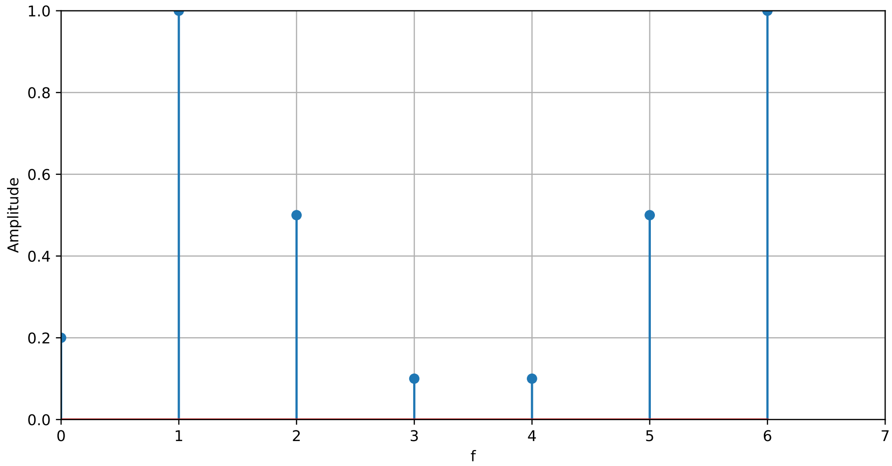
```
figure(figsize=(10,5))
stem(spectre_etendu)
xlabel("f")
ylabel("Amplitude")
grid()
```



Le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence f_e est périodique, de période f_e.

Pour que la première moitié du spectre du signal échantillonné (fréquences de 0 à $f_e/2$) corresponde effectivement au spectre du signal analogique, il faut que l'échantillonnage soit fait en respectant la condition de Nyquist-Shannon. Dans cet exemple, c'est encore le cas avec 7 échantillons par période :

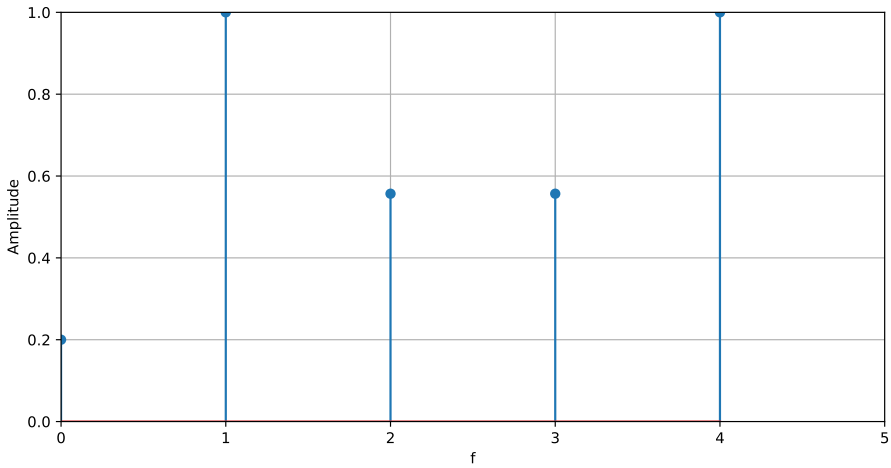
```
N = 7
Te = T/N
t = np.arange(0,N)*Te
x = u(t)
tfd = fft(x)
freq = np.arange(0,N)*1.0/T
figure(figsize=(10,5))
stem(freq,np.absolute(tfd)*2.0/N)
xlabel("f")
ylabel("Amplitude")
axis([0,7,0,1])
grid()
```



4.b. Sous-échantillonnage : repliement de spectre

Voici ce qu'il arrive si la condition de Nyquist-Shannon n'est pas vérifiée, avec seulement 5 échantillons par périodes :

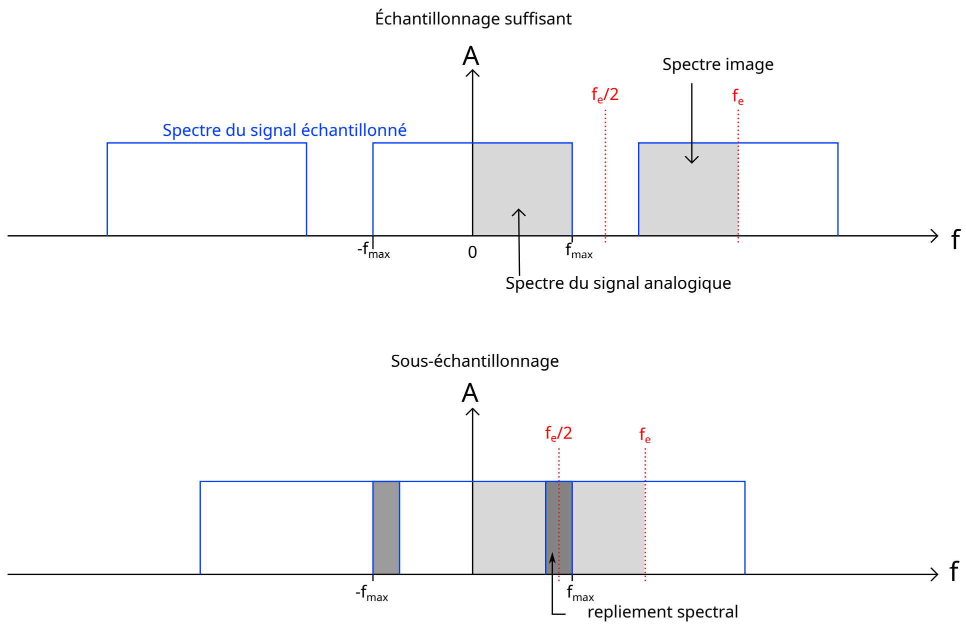
```
N = 5
Te = T/N
t = np.arange(0,N)*Te
x = u(t)
tfd = fft(x)
freq = np.arange(0,N)*1.0/T
figure(figsize=(10,5))
stem(freq,np.absolute(tfd)*2.0/N)
xlabel("f")
ylabel("Amplitude")
axis([0,5,0,1])
grid()
```



Le spectre obtenu dans la première moitié ne comporte que trois raies, de fréquences 0,1 et 2. Il ne correspond pas au spectre du signal analogique, ce qui montre qu'une information a été perdue lors de l'échantillonnage.

Lorsque la fréquence d'échantillonnage ne vérifie par la condition de Nyquist-Shannon, il y a *repliement du spectre* : une partie du spectre situé dans la bande $[f_e/2, f_e]$ se replie dans la bande $[0, f_e/2]$. Le spectre dans la bande $[0, f_e/2]$ est alors différent du spectre du signal analogique.

Plus généralement, supposons que le spectre du signal analogique possède une fréquence maximale f_{max} (signal à bande de fréquences limitée). La figure suivante montre le spectre du signal échantillonné lorsque la condition de Nyquist-Shannon est vérifiée et lorsqu'elle ne l'est pas. Dans le premier cas (échantillonnage suffisant), le spectre du signal analogique et le spectre image ne se recouvrent pas. On conçoit alors qu'un filtrage passe-bas du signal échantillonné permette en principe de reconstruire le signal analogique (filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure $f_e/2$). En revanche, dans le second cas (sous-échantillonnage), le spectre du signal échantillonné présente un recouvrement entre le spectre du signal analogique et son spectre image. Ce phénomène est nommé *repliement spectral* car le spectre image se replie dans la bande de fréquence $[0, f_e/2]$. Dans ce cas, la recontruction du signal par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_e/2$ donnerait un signal analogique différent du signal de départ car son spectre dans la bande de recouvrement est modifié.



5. Analyse spectrale d'un signal périodique

Cette partie est un travail numérique à réaliser en Python, dans un notebook à enregistrer dans le dossier `partage/TP/TP2` et dans un sous-dossier nommé `NOM1-NOM2`.
L'analyse spectrale d'un signal périodique consiste à déterminer ses coefficients de Fourier au moyen de la TFD et à tracer son spectre. Si le signal est à bande de fréquences limitée, les coefficients de Fourier sont nuls à partir d'un rang $P+1$. Cependant, des erreurs d'arrondis font que les coefficients de Fourier obtenus par la TFD ne sont pas tout à fait nuls à partir du rang $P+1$. En conséquence, la valeur de P ne peut pas être déterminée avec certitude et on doit se contenter de choisir une valeur de P raisonnable, au delà de laquelle on considère que les coefficients de Fourier sont négligeables.
On cherche à faire l'analyse spectrale d'un signal défini par une fonction Python. Pour récupérer cette fonction, aller dans le dossier `partage/TP/TP2` et copier les fichiers `signalA.npy` et `signalPeriodiqueA.py` dans votre sous-dossier `NOM1-NOM2`. L'importation de la fonction `signal` se fait par :

```
from signalPeriodiqueA import signal
```

La signature de cette fonction est `signal(t)`. La période du signal est $T=1$.

[1] Obtenir une représentation temporelle du signal sur l'intervalle $[0,1]$ avec $N=1000$ échantillons.

[2] Au moyen de la transformée de Fourier discrète, obtenir une représentation fréquentielle du signal. Déterminer si le signal est à bande de fréquences limitée. Si c'est le cas, combien possède-t-il d'harmoniques ?

[3] Afficher les coefficients de Fourier complexe du signal. D'après ces valeurs, quelle est la valeur moyenne du signal ?

[4] Avec ces coefficients, calculer la somme partielle de Fourier pour reconstituer le signal. Tracer ce signal reconstitué avec le signal échantillonné et comparer.

[5] À quelle condition sur N la condition de Nyquist-Shannon est-elle satisfaite pour ce signal ?

[6] Réaliser un échantillonnage avec un nombre d'échantillons égal au nombre minimal. Montrer la représentation temporelle et le spectre. Obtient-on les mêmes coefficients de Fourier que précédemment ?

[7] Réaliser un échantillonnage avec un nombre d'échantillons égal à la valeur minimale moins un. Montrer la représentation temporelle et le spectre. Commenter le spectre obtenu. Quel phénomène observe-t-on sur le dernier harmonique ?

[8] Réaliser un échantillonnage avec un nombre d'échantillons égal à la valeur minimale moins deux. Montrer la représentation temporelle et le spectre. Quelles raies du spectre sont affectées par le repliement ?

Considérons à présent le signal défini par la fonction suivante :

$$u(t)=e^{\cos(2\pi t)}$$

Cette fonction périodique est de classe C^∞, ce qui implique que son spectre est à bande de fréquences limitée.

[9] Faire une analyse spectrale de ce signal. Déterminer le nombre d'harmoniques qu'on peut attribuer à ce signal.

[10] Avec les coefficients de Fourier calculés par l'analyse spectrale, tracer la somme partielle de Fourier et comparer à $u(t)$.

6. Annexes

6.a. Théorème de Shannon

Soit un signal $u(t)$ dont le spectre admet une fréquence maximale f_{max} et un échantillonnage effectué à une fréquence d'échantillonnage f_e telle que :

$$f_e > 2f_{max}$$

Le signal $u(t)$ peut être entièrement reconstitué à partir des échantillons, selon la relation :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_e) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)\right)}{\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)}$$

La formule ci-dessus (formule de Shannon) suppose que l'on dispose d'une infinité d'échantillons, ce qui est bien sûr impossible en réalité. En raison du nombre fini d'échantillons, la reconstruction du signal à partir des échantillons est imparfaite, mais elle est d'autant meilleure que la fréquence d'échantillonnage est grande devant $2f_{max}$. En pratique, on n'utilise pas la formule de Shannon pour reconstruire un signal car sa mise en œuvre est beaucoup trop complexe d'un point de vue calculatoire : l'évaluation de $u(t)$ à un instant donné nécessiterait le calcul de la somme de N termes, ce qui fait une complexité globale en aN^2 pour calculer aN échantillons. Il est en revanche possible de reconstruire le signal en utilisant des méthodes de traitement de signal numérique (augmentation de la fréquence d'échantillonnage et filtrage numérique passe-bas). Lorsque c'est possible, il est préférable de réaliser un sur-échantillonnage ($f_e \gg 2f_{max}$) et de faire la reconstruction par interpolation linéaire.

6.b. Transformée de Fourier discrète

Le coefficient de Fourier complexe d'une fonction $u(t)$ de période T est défini par :

$$\underline{C}_n = A_n - jB_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \tag{13}$$

Soit un échantillonnage de N points répartis sur l'intervalle $[0, T]$:

$$u_k = u(kT_e)\ , k = 0, 1, \dots N-1 \text{ avec } T_e = \frac{T}{N} \tag{14}$$

La méthode des rectangles permet d'obtenir une approximation du coefficient de Fourier complexe :

$$\underline{C}_n \approx \frac{2}{NT_e}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-jn\frac{2\pi}{NT_e}kT_e\right)T_e = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-jn\frac{2\pi}{N}k\right) \tag{15}$$

On pose donc :

$$\boxed{\underline{F}_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-j2\pi\frac{n}{N}k\right) \text{ pour } n = 0, 1, \dots N-1 \qquad (16)}$$

La transformée de Fourier discrète de rang N d'un signal échantillonnée est l'application définie par :

$$\text{TFD} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^N \tag{17}$$

$$(u_0, u_1, \dots u_{N-1}) \to (\underline{F}_0, \underline{F}_1, \dots \underline{F}_{N-1}) \tag{18}$$

Si $n < N/2$, le nombre complexe $\underline{F}_n$, multiplié par $2/N$, est une approximation du coefficient de Fourier complexe $\underline{C}_n$ de la fonction périodique de période T. La TFD définit le spectre du signal échantillonné. Le nombre complexe $\underline{F}_n$, multiplié par $2/N$, est la composante de fréquence $n/(NT_e)$ du spectre du signal échantillonné.
Théorème : si la fonction $u(t)$ de période T est à bande de fréquence limitée et si elle est échantillonnée sur l'intervalle $[0, T]$ en respectant la condition de Nyquist-Shannon, alors $\underline{C}_n = \frac{2}{N}\underline{F}_n$ pour $n < N/2$. Dans ce cas, la TFD donne exactement les coefficients de Fourier (au facteur $2/N$ près). Il s'agit d'une égalité théorique : en réalité, le calcul de la TFD est affecté d'erreurs d'arrondis qui fait que $\underline{F}_n$ n'est pas nul même si le coefficient de Fourier correspondant est nul.
Considérons le terme $N - n$ de la TFD, avec $n = 1, 2, \dots N - 1$:

$$\underline{F}_{N-n} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-j2\pi \frac{N-n}{N} k\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(j2\pi \frac{n}{N} k\right) = \underline{F}_n^* \tag{19}$$

où z^* désigne le complexe conjugé de z. La représentation du spectre en amplitude consiste à tracer le module de $\underline{F}_n$ en ordonnée et la fréquence $\frac{n}{T} = \frac{n}{NT_e}$ en abscisse. La propriété :

$$|\underline{F}_n| = |\underline{F}_{N-n}| \tag{20}$$

implique que la composante du spectre de fréquence $\frac{n}{NT_e}$ a la même amplitude que celle de fréquence $\frac{N-n}{NT_e} = \frac{1}{T_e} - \frac{n}{NT_e}$.
Une autre propriété importante de $\underline{F}_n$ est :

$$\underline{F}_{N+n} = \underline{F}_n \tag{21}$$

Le spectre du signal échantillonné est défini par la relation (16) pour $n \in \mathbb{Z}$. Le spectre du signal échantillonné est donc de période N et la donnée des N nombres complexes $(\underline{F}_0, \underline{F}_1, \dots \underline{F}_{N-1})$ définit entièrement ce spectre.